

Il y a cent ans s'éteignait Henri Poincaré, « premier mathématicien de France et du Monde », comme on le disait dans sa patrie, et dans le reste du monde aussi.

Bourgeois tranquille et replet, myope comme une taupe, il n'en a pas moins fait rêver les hommes pour les siècles à venir, par la puissance de son esprit. Poincaré n'était pas seulement un grand mathématicien ; il était aussi un grand physicien, un grand astronome, un grand ingénieur, un grand philosophe, en un mot un grand homme universel, consulté au soir de sa vie comme un oracle sur tous les sujets. Symbole de la force et de l'unité de la pensée humaine, fragile et précieuse, sur laquelle il a écrit d'admirables pages.

La pensée n'est qu'un éclair au milieu d'une longue nuit, mais c'est cet éclair qui est tout.

Poincaré s'intéressait à tout, apprenait tout, révolutionnait les théories mathématiques et physiques, voyait tout en grand. Pas étonnant qu'il fit aussi de grandes erreurs ! Après tout, seuls les morts ne font pas d'erreurs ; et Poincaré n'était pas de ceux qui préfèrent se cantonner à des énoncés prudents et insipides qui n'ont même pas le mérite d'être faux.

Sa plus célèbre erreur, celle qui brillera longtemps dans la légende des sciences, il l'a commise en étudiant le problème des Trois Corps. Pourquoi trois corps ? Parce que l'on savait, depuis Newton, résoudre le problème de deux corps en interaction, mais pas celui de trois ou de quatre corps, ou de n'importe quel nombre plus élevé de corps. Prenez seulement deux corps massifs : la Terre et le Soleil par exemple ; faites abstraction de tout le reste de l'univers, et calculez leur mouvement à l'aide des équations de Newton. La solution est bientôt trouvée : la Terre dessine une merveilleuse ellipse autour du Soleil, une trajectoire simple et élégante, découverte il y a déjà plusieurs millénaires par les mathématiciens grecs, bien avant que l'on sache la Terre tournante – et redécouverte par l'astronome allemand Johannes Kepler avant même que Newton eût compris l'attraction gravitationnelle.

Avec deux corps, nous avons donc une belle ellipse, stable à l'infini, se répétant jusqu'à la fin des temps. Mais si l'on tient compte des autres corps, des autres planètes, que se passe-t-il ? Après tout, si la Terre est attirée irrésistiblement par le Soleil, elle est aussi influencée par Jupiter, Mars et toutes les planètes plus lointaines. Certes, ces influences ne pèsent pas lourd face à la formidable attraction solaire, mais ne seraient-elles pas capables de détraquer la belle machine ? (...)

À 35 ans, pour prétendre au prix mathématique offert par le roi Oscar de Suède, Poincaré étudia le problème des trois corps, dans une version encore un peu simplifiée. Un problème qui le passionnait – lui qui n'aimait rien tant qu'observer le monde environnant pour en tirer les lois constitutives. Un problème qui lui permit de se dépasser ! (...) Poincaré gagna le prix haut la main.

Sa copie n'était pourtant pas parfaite, loin de là. Que de flou, que d'imprécisions, que d'ambiguïtés dans la démonstration de Poincaré ! (...) Ses articles bouillonnaient d'idées, mais la vérification n'en était guère aisée, et personne ne fut surpris par la longueur de la liste de remarques que prépara Lars Phragmén, le jeune et talentueux assistant chargé d'éditer le manuscrit de Poincaré.

Poincaré corrigea tant qu'il le put, jusqu'à ce qu'il soit convaincu d'avoir tout repris en main. Un manuscrit bien construit, un édifice irréprochable !

Et pourtant, l'une des lézardes que Phragmén avait repérées dans le monument se mit à tourmenter Poincaré un peu plus qu'il ne le fallait. Un jour, il dut se rendre à l'évidence : tout était faux ! La fissure s'était agrandie, jusqu'à former un trou béant qui entraînait l'écroulement de toute l'architecture du théorème.

Mais Poincaré avait déjà reçu le prix, les honneurs et l'argent, son article était publié, partout on le célébrait. Quelle pression phénoménale sur les épaules du jeune mathématicien ! Que faire de cette preuve vérolée ?

Avant toute chose, éviter de répandre l'erreur – et l'éditeur réussit à rapatrier tous les exemplaires de l'article publié. Heureusement qu'Internet n'existait pas encore ! Il fut possible de tout récupérer, de tout détruire. L'affaire coûta cher à Poincaré, mais il en allait de sa réputation. Et il pouvait à nouveau faire travailler son puissant cerveau.

Et, à peine croyable ! Poincaré réussit à tout réparer. Avec une différence de taille, certes : sa conclusion avait changé du tout au tout, il avait mis le doigt sur une difficulté majeure et découvert comment l'instabilité pouvait naître dans la belle mécanique cosmique régie par des équations impeccables et précises comme des horloges. (...)

Après tout, l'imperfection nous est familière. Nous baignons dans l'imperfection, nous sommes les enfants de l'imperfection, nous lui devons tout. C'est l'imperfection de la reproduction qui a permis l'évolution des espèces ; des centaines de millions de mutations, peut-être, depuis l'invention de la bactérie, ont fait ce que nous sommes ; sélectionnés par

l'ampleur de nos populations, d'erreur de transcription en erreur de transmission. (...) L'imperfection, statutaire et salubre, est notre force ; tous parfaits, nous serions condamnés. La variabilité génétique est notre meilleur atout face au monde biologique si mouvant et si menaçant. Et elle donne lieu à de si merveilleux mélanges. (...)

L'imperfection est aussi, cela va de soi, tapie dans tous nos programmes informatiques, de plus en plus monumentaux, dont nul ne pourra éradiquer tous les bugs... (...)

Mais la pensée, cet éclair dont nous sommes si fiers, n'est-elle pas parfaite ? Laissez-nous rire ! La pensée humaine, quelle confusion. Ce n'est qu'à grand peine qu'elle a créé le raisonnement mathématique, parfait dans sa forme et sa logique. Mais ce n'est pas là sa forme première. Poincaré l'a bien expliqué en analysant certaines de ses plus magistrales découvertes : les associations d'idées, spontanées et incompréhensibles, succédant aux périodes de réflexion consciente dans un chaos imprévisible à l'image de ses théories physiques. Même les grands mathématiciens doivent s'appuyer sur l'irrationnel. Et corollairement, ils sont en butte aux erreurs, même les meilleurs mathématiciens, comme le montre l'exemple Poincaré. Parfois ils font tout à la fois deux erreurs qui ont le bon goût de s'annuler, comme cela arriva à Galilée décrivant la trajectoire d'un boulet de canon ; ou parfois, plus tragiquement, ils se heurtent à trois erreurs qui se renforcent, comme celles de Lord Kelvin calculant l'âge de la Terre. On pourrait multiplier les exemples et contre-exemples.

Pourtant il n'y a là rien de tragique ; dans le domaine de la pensée humaine comme dans celui des langues et dans celui de la biologie, heureusement que l'erreur est possible, c'est d'elle que naîtra l'inattendu et parfois le sublime !

Allons chercher l'erreur chez un autre symbole de l'illumination constructive, le grand John Nash, qui en dix ans et trois théorèmes révolutionna toute l'analyse mathématique avant de recevoir le prix Nobel pour ses travaux de jeunesse.

Quand il travaille à démontrer le théorème du plongement isométrique, répondant à un défi lancé par un collègue qu'il a exaspéré par sa morgue, il a conscience de faire quelque chose de grand. Et c'est avec fierté qu'à l'issue d'une gestation chaotique, il soumet à ses pairs un manuscrit sinueux d'une incroyable complexité, un magma dont les principales idées surnagent à grand peine, une démonstration crue que son collègue Herbert Federer devra remettre en forme au prix de tourments infinis.

Une solution si confuse ! Alors qu'une autre voie existe ; trente ans plus tard, le mathématicien allemand Matthias Günther trouvera une solution si simple, si élégante, si parfaite !

Et pourtant, heureusement que Nash ne l'a pas vue, cette solution parfaite. De son magma, repris et simplifié maintes fois, partiellement faux, est finalement née la technique la plus puissante de l'analyse perturbative non linéaire, la méthode de Nash-Moser, dont l'importance dépasse de très loin le cadre du plongement isométrique – une méthode universelle que nous continuerons à enseigner à nos étudiants pendant les siècles à venir.

Oui, c'est bien de l'imperfection que naissent les grands progrès.

Comme l'a dit un grand chanteur italien touché par la grâce de l'inspiration,

Dai diamanti non nasce niente

Dal letame nascono i fiori

Des diamants ne naît jamais rien

De la tourbe naissent des fleurs

Cédric VILLANI, *Les. Mathématiques sont la poésie des sciences*, 2015.

Vous ferez un **résumé** de ce texte de 1 436 mots en 100 mots $\pm$ 10 %.

Marquez les dizaines de mots et indiquez le **dé-compte** total à la fin de votre copie.

Les formules caractéristiques doivent impérativement être **reformulées**.

Appuyez-vous sur les **liens logiques** du texte, explicites ou implicites, et **faites des paragraphes**.

Prévoyez **une marge** d'au moins 5 ou 6 cm, et **sautez des lignes**.

Il est interdit d'utiliser un stylo-plume ; utilisez un **stylo-bille ou un feutre de couleur bleue ou noire**. Pas de blanc machine, ni d'effaceur.